BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2013***

RİYAZİYYAT

УДК 517.977.52

ОБ ОДНОЙ НЕГЛАДКОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ГУРСА-ДАРБУ

К.Б.МАНСИМОВ[*,], Г.Ш.РАМАЗАНОВА[*]**
Бакинский Государственный Университет[*]
Институт Кибернетики НАН Азербайджана[**]
mansimov@front.ru

Рассматривается одна негладкая задача оптимального управления, описываемая системой нелинейных гиперболических уравнений с краевыми условиями Гурса. Получены необходимые условия оптимальности первого порядка.

Ключевые слова: негладкая задача управления, система Гурса-Дарбу, сопряженная система, принцип максимума, квазидифференцируемая функция.

В работах [1, с. 69-80; 2, с. 1385-1388; 3, с. 512-514; 4, с. 175-220; 5, с. 352-368] и др. изучены различные негладкие задачи оптимального управления, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, как в смысле негладкости функций задающие критерий качества, так и в случае негладкости правых частей системы уравнений по вектору состояния.

Предлагаемая работа посвящена исследованию одной задачи оптимального управления системами Гурса-Дарбу без предположения гладкости по вектору состояния функционала качества и правой части дифференциального уравнения, описывающий исследуемый процесс.

Постановка задачи. Пусть управляемый процесс описывается системой нелинейных гиперболических уравнений

$$z_{tx} = f(t,x,z,u), \quad (t,x) \in D = T \times X = [t_0,t_1] \times [x_0,x_1], \tag{2.1}$$

с краевыми условиями

$$z(t_0, x) = a(x), \quad x \in X,$$
$$z(t, x_0) = b(t), \quad t \in T, \qquad (2.2)$$
$$a(x_0) = b(t_0).$$

Здесь $z(t,x)$ – n-мерный вектор состояния, $f(t,x,z,u)$ – заданная n-мерная вектор-функция непрерывная в $D \times R^n \times R^r$ и удовлетворяющая условию Липшица, а каждая ее компонента $f_i(t,x,z,u)$, $i = \overline{1,n}$ имеет производные по любому направлению, $a(x)$, $b(t)$ – заданные непрерывно-дифференцируемые на $[x_0, x_1]$, $[t_0, t_1]$ вектор функции, соответственно, $u(t,x)$ – r-мерный кусочно-непрерывный (с конечным числом линий разрыва первого рода) вектор управляющих воздействий (см. напр. [6, с. 1158]) со значениями из заданного непустого и ограниченного множества U, т.е.

$$u(t,x) \in U \subset R^r, \quad t \in [t_0, t_1] = T. \qquad (2.3)$$

Управляющую функцию $u(t,x)$, удовлетворяющую вышеприведенным ограничениям назовем допустимым управлением.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $u(t,x)$ соответствует единственное решение $z(t,x)$ (в смысле [6, с. 1158-1159]) задачи (2.1)-(2.2).

Задача заключается в минимизации терминального функционала

$$S(u) = \Phi(z(t_1, x_1)), \qquad (2.4)$$

определенного на решениях краевой задачи (2.1)-(2.2), порожденных всевозможными допустимыми управлениями.

Здесь $\Phi(z)$ – заданная липшицевая, дифференцируемая в R^n по направлениям скалярная функция.

Допустимое управление $u(t,x)$ доставляющий минимум функционалу (2.4) при ограничениях (2.1)-(2.3) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t,x), z(t,x))$ – оптимальным процессом.

Основные результаты. Пусть $u(t,x)$ заданное допустимое управление. Через

$$u^\varepsilon(t,x) = \begin{cases} v, & (t,x) \in [\theta, \theta + \sqrt{\varepsilon}) \times [\xi, \xi + \sqrt{\varepsilon}) = D(\varepsilon), \\ u(t,x), & (t,x) \in D \setminus D(\varepsilon) \end{cases} \qquad (3.1)$$

определим "возмущенное" управление.

Здесь $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1) \times [x_0, x_1)$ – произвольная точка непрерывности управления $u(t,x)$, $v \in U$ – произвольный вектор, а $\varepsilon > 0$ – произвольное достаточно малое число, такое что $\theta+\sqrt{\varepsilon}<t_1$, $\xi+\sqrt{\varepsilon}<x_1$.

Через $z^{\varepsilon}(t,x)$ обозначим решение краевой задачи (2.1)-(2.2) соответствующее "возмущенному" управлению $u^{\varepsilon}(t,x)$, определяемой формулой (2.5).

Положим

$$h(t,x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z^{\varepsilon}(t,x)-z(t,x)}{\varepsilon}.$$

Здесь по определению $h(t,x)=(h_1(t,x),\, h_2(t,x),\, ...,\, h_n(t,x))$.

Из краевой задачи (2.1)-(2.2) следует, что

$$z^{\varepsilon}(t,x)-z(t,x)=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}[f(\tau,s,z_{\varepsilon}(\tau,s),u_{\varepsilon}(\tau,s))-f(\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s))]ds\,d\tau. \tag{3.2}$$

Из оценки, например, установленные, а также приведенные в работах [6-13] и др. следует, что

$$\left\|\Delta z^{\varepsilon}(t,x)\right\|=\left\|z^{\varepsilon}(t,x)\right\|-\left\|z(t,x)\right\|\le L_1\,\varepsilon,\quad (t,x)\in D, \tag{3.3}$$

$$L_1=const>0.$$

Учитывая эту оценку из (3.2) получаем, что

$$z^{\varepsilon}(t,x)-z(t,x)=\int_{\theta}^{\theta+\sqrt{\varepsilon}}\int_{\xi}^{\xi+\sqrt{\varepsilon}}[f(\tau,s,z(\tau,s),v)-f(\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s))]ds\,d\tau+$$

$$+\int_{\theta+\varepsilon}^{t}\int_{\xi+\varepsilon}^{x}[f(\tau,s,z_{\varepsilon}(\tau,s),u(\tau,s))-f(\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s))]ds\,d\tau.$$

Отсюда используя то, что функция $f(t,x,z,u)$ имеет по z производные по любому направлению получаем, что при $t>\theta$, $x>\xi$

$$h(t,x)=\int_{\theta}^{t}\int_{\xi}^{x}\frac{\partial f(\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s))}{\partial h(\tau,s)}ds\,d\tau+$$

$$+[f(\theta,\xi,z(\theta,\xi),v)-f(\theta,\xi,z(\theta,\xi),u(\theta,\xi))]. \tag{3.4}$$

Напомним, что при $t<\theta$, $\xi<x$, $h(t,x)\equiv 0$.

Соотношение (3.4) эквивалентно следующему дифференциальному уравнению с частными производными

$$h_{tx}=\frac{\partial f(t,x,z(t,x),u(t,x))}{\partial h(t,x)},\quad t\ge\theta,\ x\ge\xi, \tag{3.5}$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned}h(\theta,x)&=\Delta_v f(\theta,\xi,z(\theta,\xi),u(\theta,\xi)),\\ h(t,\xi)&=\Delta_v f(\theta,\xi,z(\theta,\xi),u(\theta,\xi)).\end{aligned} \tag{3.6}$$

По предположению функция $\Phi(z)$ дифференцируема по любому направлению и удовлетворяет условию Липшица. Поэтому используя формулу

$$z^{\varepsilon}(t,x) = z(t,x) + \varepsilon\, h(t,x) + o(\varepsilon,t,x),$$

имеем

$$S(u^{\varepsilon}) - S(u) = \Phi(z(t_1,x_1)) + \varepsilon\, h(t_1,x_1) + o(\varepsilon;t_1,x_1) - \Phi(z(t_1,x_1)) =$$

$$= \varepsilon \frac{\partial \Phi(z(t_1,x_1))}{\partial h(t_1,x_1)} + o_1(\varepsilon).$$

Следовательно, имеет место

Теорема 3.1. Для того, чтобы допустимое управление $u^{\varepsilon}(t,x)$ было оптимальным управлением необходимо, чтобы неравенство

$$\frac{\partial \Phi(z(t_1,x_1))}{\partial h(t_1,x_1)} \geq 0 \tag{3.7}$$

выполнялось для всех допустимых вариаций $h(t_1,x_1)$ состояния $z(t_1,x_1)$.

Из этого общего результата можно получить более конструктивные необходимые условия оптимальности. Для этого нужно использовать специфические свойства функций $f(t,x,z,u)$ и $\Phi(z)$.

Рассмотрим сначала случай, когда $f(t,x,z,u)$ гладкая, по z вектор-функция и $\Phi(z)$ непрерывно дифференцируема. Тогда интегральное уравнение (3.4) записывается в виде

$$h(t,x) = \int_{\theta}^{t}\int_{\xi}^{x} \frac{\partial f(\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s))}{\partial z} h(\tau,s)\,ds\,d\tau + \Delta_v f(\theta,\xi,z(\theta,\xi),u(\theta,\xi)),$$

$$t \geq \theta,\ x \geq \xi. \tag{3.8}$$

Найдем представление решения интегрального уравнения (3.8).

Используя формулу о представлении решений линейных неоднородных интегральных уравнений типа Вольтерра (см. например [14-16]) имеем

$$h(t,x) = \Delta_v f(\theta,\xi,z(\theta,\xi),u(\theta,\xi)) +$$

$$+ \int_{\theta}^{t}\int_{\xi}^{x} R(t,x;\,\tau,s)\Delta_v f(\theta,\xi,z(\theta,\xi),u(\theta,\xi))\,ds\,d\tau. \tag{3.9}$$

Здесь $R(t,x;\,\tau,s)$ – $(n\times n)$-матричная функция, являющаяся решением уравнения

$$R(t,x;\,\tau,s) = \frac{\partial f(\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s))}{\partial z} +$$

$$+ \int_{\tau}^{t}\int_{s}^{x} R(t,x;\,\alpha,\beta)\frac{\partial f(\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s))}{\partial z}\,d\alpha\,d\beta. \tag{3.10}$$

Принимая во внимание сделанные предположения и представление (3.9) из неравенства (3.7), имеем

$$\frac{\partial\Phi(z(t_1,x_1))}{\partial h(t_1,x_1)}=\frac{\partial\Phi'(z(t_1,x_1))}{\partial z}h(t_1,x_1)=$$

$$=\frac{\partial\Phi'(z(t_1,x_1))}{\partial z}\left[E+\int_\theta^{t_1}\int_\xi^{x_1}R(t_1,x_1;\,\tau,s)ds\,d\tau\right]\Delta_v f(\theta,\xi,z(\theta,\xi),u(\theta,\xi))\geq 0. \tag{3.11}$$

Полагая

$$\psi(\theta,\xi)=-\left[E+\int_\theta^{t_1}\int_\xi^{x_1}R(t_1,x_1;\,\tau,s)ds\,d\tau\right]'\frac{\partial\Phi'(z(t_1,x_1))}{\partial z}, \tag{3.12}$$

$$H(\theta,\xi,z(\theta,\xi),v,\psi(\theta,\xi))=\psi'(\theta,\xi)\,f(\theta,\xi,z(\theta,\xi),v),$$

неравенство (3.1) записывается в виде

$$\Delta_v H(\theta,\xi,z(\theta,\xi),u(\theta,\xi),\psi(\theta,\xi))\leq 0\,.$$

Отсюда в силу произвольности $v\in U$ и $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$ приходим к известному (см. напр. [6-13]) утверждению

Теорема 3.2. (Принцип максимума Понтрягина [6-13]). Если функции $f(t,x,z,u)$, $\Phi(z)$ непрерывно дифференцируемы по z, то для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ необходимо, чтобы соотношение

$$\max_{v\in U}H(\theta,\xi,z(\theta,\xi),v,\psi(\theta,\xi))=H(\theta,\xi,z(\theta,\xi),u(\theta,\xi),\psi(\theta,\xi)) \tag{3.13}$$

выполнялось для всех $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$.

Соотношение (3.13), есть известное условие максимума для задачи (2.1)-(2.4).

Получим уравнение, которому удовлетворяет вектор-функция $\psi(\theta,\xi)$.

Решение интегрального уравнения (3.8) допускает представление в виде (3.9). Учитывая этого из (3.12), имеем

$$\psi(\theta,\xi)=-\left(E+\int\limits_{\theta}^{t_1}\int\limits_{\xi}^{x_1}R(t_1,x_1;\,\tau,s)ds\,d\tau\right)'\frac{\partial\Phi'(z(t_1,x_1))}{\partial z}=$$

$$=-\left[\left(E+\int\limits_{\theta}^{t_1}\int\limits_{\xi}^{x_1}\frac{\partial f'(\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s))}{\partial z}ds\,d\tau\right)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\theta}^{t_1}\int\limits_{\xi}^{x_1}\left(\left[\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{s}^{x}R(t,x;\,\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta\right]\frac{\partial f(\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s))}{\partial z}ds\,d\tau\right)'\right]\frac{\partial\Phi(z(t_1,x_1))}{\partial z}=$$

$$=-\frac{\partial\Phi(z(t_1,x_1))}{\partial z}+\int\limits_{\theta}^{t_1}\int\limits_{\xi}^{x_1}\frac{\partial f'(\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s))}{\partial z}\left[E+\int\limits_{\tau}^{t_1}\int\limits_{s}^{x_1}R(t_1,x_1;\,\alpha,\beta)d\alpha\,d\beta\right]\times$$

$$\times\frac{\partial\Phi(z(t_1,x_1))}{\partial z}ds\,d\tau=-\frac{\partial\Phi(z(t_1,x_1))}{\partial z}+\int\limits_{\theta}^{t_1}\int\limits_{\xi}^{x_1}\frac{\partial f'(\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s))}{\partial z}\psi(\tau,s)ds\,d\tau.$$

Таким образом, доказали, что $\psi(\theta,\xi)$, определяемая, формулой (3.12), является решением интегрального уравнения

$$\psi(\theta,\xi)=\int\limits_{\theta}^{t_1}\int\limits_{\xi}^{x_1}\frac{\partial f'(\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s))}{\partial z}\psi(\tau,s)ds\,d\tau-\frac{\partial\Phi(z(t_1,x_1))}{\partial z}. \qquad (3.14)$$

Теперь предположим, что $f(t,x,z,u)$ гладкая по z вектор-функция, а функция $\Phi(z)$ квазидифференцируема в точке $z(t_1,x_1)$.

Тогда неравенство (3.7) принимает вид

$$\frac{\partial\Phi(z(t_1,x_1))}{\partial h(t_1,x_1)}=\max_{\alpha\in\underline{\partial}\Phi(z(t_1,x_1))}\alpha' h(t_1,x_1)+\min_{\beta\in\bar{\partial}\Phi(z(t_1,x_1))}\beta' h(t_1,x_1), \qquad (3.15)$$

где $\left[\underline{\partial}\Phi(z(t_1,x_1)),\,\bar{\partial}\Phi(z(t_1,x_1))\right]$ – квазидифференциал (см. напр. [4, 5]) функции $\Phi(z)$ в точке $z(t_1,x_1)$.

Из (3.7), (3.15) получаем, что

$$\max_{\alpha\in\underline{\partial}\Phi(z(t_1,x_1))}\alpha'\left[\left(E+\int\limits_{\theta}^{t_1}\int\limits_{\xi}^{x_1}R(t_1,x_1;\,t,x)dt\,dx\right)\Delta_v f(\theta,\xi)\right]+$$

$$+\min_{\beta\in\bar{\partial}\Phi(z(t_1,x_1))}\beta'\left[\left(E+\int\limits_{\theta}^{t_1}\int\limits_{\xi}^{x_1}R(t_1,x_1;\,t,x)dx\,dt\right)\Delta_v f(\theta,\xi)\right]\geq 0. \qquad (3.16)$$

Полагая

$$\psi_\alpha(\theta,\xi)=\left[E+\int\limits_{\theta}^{t_1}\int\limits_{\xi}^{x_1}R(t_1,x_1;\,t,x)dx\,dt\right]'\alpha\,,\quad \alpha\in\underline{\partial}\Phi(z(t_1,x_1)), \qquad (3.17)$$

$$\psi_\beta(\theta,\xi)=\left[E+\int_\theta^{t_1}\int_\xi^{x_1}R(t_1,x_1;\,t,x)dx\,dt\right]'\beta\,,\quad \beta\in\bar{\partial}\Phi(z(t_1,x_1)). \quad (3.18)$$

Из неравенства (3.16) получаем, что

$$\max_{v\in U}\left[\max_{\alpha\in\underline{\partial}\Phi(z(t_1,x_1))}\Delta_v H(\theta,\xi,z(\theta,\xi),u(\theta,\xi),\psi_\alpha(\theta,\xi))+\right.$$
$$\left.+\min_{\beta\in\bar{\partial}\Phi(z(t_1,x_1))}\Delta_v H(\theta,\xi,z(\theta,\xi),u(\theta,\xi),\psi_\beta(\theta,\xi))\right]=0. \quad (3.19)$$

Условие оптимальности (3.19) является аналогом принципа максимума Л.С.Понтрягина. Функции $\psi_\alpha(\theta,\xi)$, $\psi_\beta(\theta,\xi)$, определяемые формулами (3.17), (3.18), называются сопряженными функциями в рассматриваемой задаче.

Наконец отметим, что в случае выпуклости множества U и гладкости вектор-функции $f(t,x,z,u)$ по z,u и можно получить аналог линеаризованного условия максимума.

Теорема 3.3. В случае выпуклости множества U для того, чтобы допустимое управление $u(t,x)$ было оптимальным необходимо, чтобы неравенство

$$\max_{\alpha\in\underline{\partial}\Phi(z(t_1,x_1))}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial H'(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi_\alpha(t,x))}{\partial u}(v(t,x)-u(t,x))dx\,dt+$$
$$+\min_{\beta\in\bar{\partial}\Phi(z(t_1,x_1))}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial H'(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi_\alpha(t,x))}{\partial u}(v(t,x)-u(t,x))dx\,dt\geq 0 \quad (3.20)$$

выполнялось для всех $v(t,x)\in U$, $(t,x)\in D$.

Соотношение (3.20) есть аналог линеаризованного условия максимума в рассматриваемой задаче.

Случай наличия функциональных ограничений типа неравенств. В этом пункте рассматривается задача о минимуме функционала

$$S_0(u)=\Phi_0(z(t_1,x_1)) \quad (4.1)$$

при ограничениях

$$S_i(u)=\Phi_i(z(t_1,x_1))\leq 0\,,\quad i=\overline{1,p}\,, \quad (4.2)$$

$$u(t,x)\in U\subset R^r,\quad (t,x)\in D=[t_0,t_1]\times[x_0,x_1], \quad (4.3)$$

$$z_{tx}=f(t,x,z,u),\quad (t,x)\in D, \quad (4.4)$$

$$z(t_0,x)=a(x),\quad x\in X,$$
$$z(t,x_0)=b(t),\quad t\in T, \quad (4.5)$$
$$a(x_0)=b(t_0).$$

Здесь $\varphi_i(z),\ i=\overline{0,p}$ – заданные липшицевые и дифференцируемые по направлениям скалярные функции, а остальные данные задачи (4.1)-(4.5) удовлетворяют тем условиям гладкости, которые приведены в п.1.

Пусть $(u(t,x),\, z(t,x))$ оптимальное управление в задаче (4.1)-(4.5). Введем множество активных ограничений $I(u)=\{i:\ \Phi_i(z(t_1,x_1))=0,\ \ i=\overline{1,p}\}$ и положим $J(u)=\{0\}\cup I(u)$.

Теорема 4.1. Для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ в задаче (4.1)-(4.5) необходимо, чтобы неравенство

$$\max_{i\in J(u)}\frac{\partial\Phi_i(z(t_1,x_1))}{\partial h(t_1,x_1)}\geq 0 \tag{4.6}$$

выполнялось для всех допустимых вариаций $h(t_1,x_1)$ состояния $z(t_1,x_1)$.

Доказательство. Допустим обратное. Пусть существует допустимое направление $\bar h(t_1,x_1)$, т.е. $\bar v\in U$, $(\bar\theta,\bar\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$ такие, что

$$\max_{i\in J(u)}\frac{\partial\Phi_i(z(t_1,x_1))}{\partial h(t_1,x_1)}<0\ . \tag{4.7}$$

Специальное проварьированное управление определим по формуле

$$\bar u^{\varepsilon}(t,x)=\begin{cases}\bar v,\ (t,x)\in D(\varepsilon)=\left[\bar\theta,\bar\theta+\sqrt{\varepsilon}\right)\times\left[\bar\xi,\bar\xi+\sqrt{\varepsilon}\right),\\ u(t,x),\quad (t,x)\in D\setminus D(\varepsilon).\end{cases}$$

Тогда ясно, что

$$\bar h(t,x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\bar z^{\varepsilon}(t,x)-u(t,x)}{\varepsilon} \tag{4.8}$$

будет решением уравнения

$$\bar h(t,x)=\int_{\bar\theta}^{t}\int_{\bar\xi}^{x}\frac{\partial f(\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s))}{\partial\bar h(\tau,s)}ds\,d\tau+$$
$$+\left[f(\bar\theta,\bar\xi,z(\bar\theta,\bar\xi),\bar v)-f(\bar\theta,\bar\xi,z(\bar\theta,\bar\xi),u(\bar\theta,\bar\xi))\right],$$

причем (см. п.3)

$$\bar z^{\varepsilon}(t,x)=z(t,x)-\varepsilon\,\bar h(t,x)+o(\varepsilon;\,t,x). \tag{4.9}$$

Используя (4.9) имеем

$$S_i(\bar u^{\varepsilon})\text{-}\,S_i(u)=\Phi_i(z(t_1,x_1))+\varepsilon\,\bar h(t_1,x_1)+o(\varepsilon;t_1,x_1)-\Phi(z(t_1,x_1))=$$
$$=\varepsilon\frac{\partial\Phi(z(t_1,x_1))}{\partial\bar h(t_1,x_1)}+o_1(\varepsilon),\quad i=\overline{0,p}.$$

Пусть $i\in I(u)$. Тогда по предположению (4.7) с помощью (4.9) получаем, что

$$S_i(\bar{u}_\varepsilon) = S_i(u) + \varepsilon \frac{\partial \Phi(z(t_1, x_1))}{\partial \bar{h}(t_1, x_1)} + o_1(\varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial \Phi_i(z(t_1, x_1))}{\partial \bar{h}(t_1, x_1)} + o_1(\varepsilon) < 0. \quad (4.10)$$

Если предполагать, что $i \in \{\overline{1, p}\} \setminus I(u)$, то в силу непрерывности функций $\Phi_i(z)$, $i \in \{\overline{1, p}\} \setminus I(u)$ получаем, что

$$S_i(\bar{u}^\varepsilon) = \varphi_i(z(t_1, x_1)) + \varepsilon \frac{\partial \varphi_i(z(t_1, x_1))}{\partial \bar{h}(t_1, x_1)} + o_1(\varepsilon) < 0. \quad (4.11)$$

Неравенства (4.10), (4.11) показывают, что проварьированное управление $\bar{u}^\varepsilon(t, x)$ является допустимым управлением. При этом в силу (4.7) имеем

$$S_0(\bar{u}_\varepsilon) - S(u) = \varepsilon \frac{\partial \Phi_0(z(t_1, x_1))}{\partial \bar{h}(t_1, x_1)} + o_1(\varepsilon) < 0.$$

Другими словами

$$S_0(\bar{u}_\varepsilon) < S(u).$$

А это противоречит оптимальности управления $u(t, x)$. Этим теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Мн.: 1974, 272 с.
2. Альсевич В.В. Необходимые условия оптимальности для минимаксных задач оптимизации // Дифференц. уравнения. 1976, № 8, с. 1384-1391
3. Виноградова Т.К., Демьянов В.Ф. Принцип минимакса в задачах оптимального управления // ДАН СССР. 1973, т. 213, № 3, с. 512-514.
4. Демьянов В.Ф., Виноградова Т.К., Никулина В.Н. и др. Негладкие задачи теории оптимизации и управления. Л.: ЛГУ. 1982, 324 с.
5. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциального исчисление. М.: Наука, 1990, 432 с.
6. Ащепков Л.Т., Васильев О.В. Об оптимальности особых управлений в системах Гурса-Дарбу // Журн. Выч. мат. и мат. физики. 1975, т. 15, № 5, с. 1157-1167.
7. Меликов Т.К. Особые в классическом смысле управления в системах Гурса-Дарбу. Баку: Элм, 96 с.
8. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу. Баку: Элм, 2010, 960 с.
9. Плотников В.И., Сумин В.И. Проблемы устойчивости нелинейных систем Гурса-Дарбу // Дифференц. уравнения. 1972, № 5, с. 845-856.
10. Плотников В.И., Сумин В.И. Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системами Гурса-Дарбу // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1972, № 1, с. 61-77.
11. Suryanarayana M.B. Necessary Conditions for Optimization Problems with Hyperbolic Partial Equations // SIAM Journ. Control. 1973, v. 21, No 3, p. 130-137.
12. Сумин В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными параметрами. Часть I. Вольтерровы уравнения и управляемые начально-краевые задачи. Н.Н. Нижн. Н. ун-та. 1992, 110 с.
13. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400 с.

14. Смирнов В.И. Курс высшей математики. т. IV, часть I. М., 1974, 336 с.
15. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. М.: МГУ, 1984, 196 с.
16. Абдуллаев А.А., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности второго порядка для процессов, описываемых системой нелинейных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра // Автоматика и телемеханика, 2001, № 1, с. 3-11.

QURSA-DARBU SİSTEMLƏRİ İLƏ BİR HAMAR OLMAYAN İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

K.B. MƏNSİMOV, G.Ş. RAMAZANOVA

XÜLASƏ

Məqalədə Qursa-Darbu sistemləri ilə təsvir olunan bir hamar olmayan optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün birinci tərtib zəruri şərtlər alınmışdır.

Açar sözlər: hamar olmayan idarə məsələsi, Qursa-Darbu sistemi, qoşma sistem, maksimum prinsipi, kvazidiferensiallanan funksiya.

ON ONE NONSMOOTH OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH GOURSAT-DARBOUX SYSTEMS

K.B. MANSIMOV, G.Sh. RAMAZANOVA

SUMMARY

The paper considers one nonsmooth optimal control problem described by Goursat-Darboux systems. First order necessary optimality conditions are obtained.

Key words: nonsmooth control problem, Goursat-Darboux system, adjoint system, maximum principle, quasidifferentiable function.

Поступила в редакцию: 02.12.2013 г.
Подписано к печати: 27.12.2013 г.